13/11/17

Υπενθύμιση: $f: U \to \mathbb{R}$, $\bar{x_0} \in U$. Τότε:
f σ/ς στο $\bar{x_0}$ $\iff$ $\forall (\bar{x_\nu}) \subset U$ με $\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}$
$f(\bar{x_\nu}) \xrightarrow{\sigma\nu\chi} f(\bar{x_0})$. $(\iff \underbrace{(\bar{x_\nu}, f(\bar{x_\nu}))}_{\in \Gamma f} \xrightarrow{\sigma\gamma} \underbrace{(\bar{x_0}, f(\bar{x_0}))}_{\in \Gamma f})$

Αν το $\bar{x_0}$ είναι σ.σ, τότε (μπορούμε να ορίσουμε το όριο της f στο $\bar{x_0}$) και ισχύει
$\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = f(\bar{x_0})$

$\overset{}{\underset{o\rho o}{\iff}}$ $\forall (\bar{x_\nu}) \subset U \setminus \{\bar{x_0}\}$ με $\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}$: $f(\bar{x_\nu}) \to f(\bar{x_0})$
$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta) \setminus \{\bar{x_0}\} \cap U : |f(\bar{x}) - f(\bar{x_0})| < \varepsilon$
$\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{x_0}, \delta) \cap U$ $|f(\bar{x}) - f(\bar{x_0})| < \varepsilon$

Θεώρημα (ιδιότητες συνέχειας)
$f, g : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x_0} \in U$, σ/ς στο $\bar{x_0}$. Τότε είναι σ/ς στο $\bar{x_0}$ και οι $f+g$, af, fg, $\frac{f}{g}$ αν $g(\bar{x_0}) \neq 0$, $h \circ f$ για $h: V \to \mathbb{R}$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$
h σ/ς στο $f(\bar{x_0})$. (η σύνθεση σ/ς συναρτήσεων είναι σ/ς)

Παραδείγματα

$f_i(\bar{x}) = x_i$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$i = 1, \dots, n$ είναι σ/ς (στο $\mathbb{R}^n$) $\iff$ $\forall \bar{x_0} = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$
και $\forall \bar{x_\nu} = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \to \bar{x_0}$
$f_i(\bar{x_\nu}) = x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)} = f_i(\bar{x_0})$ ή $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} x_i = x_0^{(i)}$ $\forall i = 1, \dots, n$

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = x \\ g(x,y) = y \end{array}\right\}$ σ/ς σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow (fg)(x,y) = xy$ $\quad f^2(x,y) = x^2 \Rightarrow (fg + f^2)(x,y) = x^2 + xy$

$\Rightarrow$ όλα τα πολυώνυμα του
$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι σ.ls συναρτήσεις
καθώς και όλες οι ρητές συναρτήσεις
όπου δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής
Επίσης συνθέσεις τέτοιων με σ.ls συναρτήσεις

$f(x,y,z) \quad \sin\left(\frac{x^3+y^6+z^9}{\cancel{1+x^2+y^4}}\right)$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

Εξετάσετε ως προς σ.ls

$\nabla 1+x^2+y^4z^6$

δεν μηδενίζεται ποτέ , είναι άρτια και $1 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ σ.ls στο } \bar{x_0} \\ g \text{ σ.ls στο } f(\bar{x_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ σ.ls στο $\bar{x_0}$

$\forall \boxed{\bar{x_\nu} \to \bar{x_0} \Rightarrow f(\bar{x_\nu}) \to f(\bar{x_0})}$ συνέχεια.

$\Rightarrow g(f(\bar{x_\nu})) \to g(f(\bar{x_0}))$

Παράδειγμα

$f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2}$

$(x,y) \neq (0,0)$

Εξετάσετε την f ως προς τη ~~σ.ls~~ συνέχεια.
(εάν δεν λέει επίσης σε κάθε σημείο του π.ο της)
και εξετάσετε εάν υπάρχει $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Λύση

Η $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$

είναι σ/ς ως ρητή (διότι είναι σαν τη πάνω)

της οποίας ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται

Θέλω να δω αν $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

~~Έχω θα το (0,0)~~

Έχω ότι το $(0,0)$ είναι σημ.σ του $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(αφού π.χ $\underbrace{(\tfrac{1}{\nu},\tfrac{1}{\nu})}_{\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}\to(0,0)$)

Έστω μια ακολουθία $(x_\nu,y_\nu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ με

$(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$

Θέλω να εξετάσω αν $f(x_\nu,y_\nu)=\dfrac{x_\nu y_\nu}{x_\nu^2+y_\nu^2}\to\ell$

Π.χ για $(\tfrac{1}{\nu},0)\to(0,0)$ έχω $f(\tfrac{1}{\nu},0)=0\to0$

Άρα θα πρέπει $\forall\, (x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$, $(x_\nu,y_\nu)\neq(0,0)$ να έχω

$f(x_\nu,y_\nu)\to0$ για να έχει όριο η f στο $(0,0)$

Όμως $f(\tfrac{1}{\nu},\tfrac{1}{\nu})=\dfrac{\frac{1}{\nu^2}}{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}=\dfrac{1}{\nu}\not\to0$

Άρα η f δεν έχει όριο στο $(0,0)$

$\boxed{\text{Άσκηση}}$: Εξετάστε αν η $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$,

$(x,y)\neq(0,0)$ έχει όριο στο $(0,0)$.

Λύση Θέλω να δω αν υπάρχει $\ell\in\mathbb{R}$, ώστε

$\forall\, (x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$, $(x_\nu,y_\nu)\neq(0,0)$: $f(x_\nu,y_\nu)\to\ell$ (Τότε το όριο

θα είναι το $\ell\in\mathbb{R}$)

Π.χ $f\left(\frac{1}{\nu},0\right)=\dfrac{\frac{1}{\nu^2}\cdot 0}{\frac{1}{\nu^2}+0^2}=0 \to 0$ (⇒ το

μονο $\ell \in \mathbb{R}$ που παιζει να ειναι το οριο ειναι το $\ell=0$).

(Επισης π.χ $f\left(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu}\right)=\dfrac{\frac{1}{\nu^2}\cdot\frac{1}{\nu}}{2\cdot\frac{1}{\nu^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu}\to 0$].

Μηπως, πραγματι $\forall\ \underbrace{(x_\nu,y_\nu)}_{\neq(0,0)} \to (0,0)$

ισχυει $\dfrac{x_\nu^2 y_\nu}{x_\nu^2+y_\nu^2}\to 0$;

$\le \dfrac{\cancel{(x_\nu^2+y_\nu^2)}\,|y_\nu|}{\cancel{(x_\nu^2+y_\nu^2)}}=|y_\nu|\to 0$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$ Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$, $\underset{\in\mathbb{R}^n}{\bar{x_0}}$ σ.σ του U

και $\bar{\ell}\in\mathbb{R}^m$ και $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$

Τότε $\bar{f}$ συγκλίνει στο $\bar{\ell}$ στο $\bar{x_0}$

$\bar{f}\to\bar{\ell}$ για $\bar{x}\to\bar{x_0}$

αν $\forall\ (\bar{x_\nu})\subset U\setminus\{\bar{x_0}\}$ με $\bar{x_\nu}\to\bar{x_0}$: $\bar{f}(\bar{x_\nu})\to\bar{\ell}$

$\Leftrightarrow \|\bar{f}(\bar{x_\nu})-\bar{\ell}\|\to 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x_0}}\|\bar{f}(\bar{x})-\bar{\ell}\|=0$

Αποδεικνύεται:
~~Αποδειξη~~ Άσκηση

οτι αν μια $\bar{f}$ συγκλίνει στο $\bar{\ell}$ στο σημειο $\bar{x_0}$ τότε το οριο είναι μοναδικό και γράφουμε
$\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x_0}}\bar{f}(\bar{x})=\bar{\ell}$

ΣΟΣ Επίσης (Άσκηση) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x})=\bar{\ell} \iff \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{x}_0+\bar{u})=\bar{\ell}$

(Ν.δ. για x_0 σ.σ του U) με όρο

Πρόταση Έστω $\bar{f}(\bar{x})=\begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$ και x_0 σ.σ του $U\subset\mathbb{R}^n$ όπου $f:U\to\mathbb{R}^m$

$\bar{\ell}=\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}$ τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x})=\bar{\ell} \iff \forall j=1,\dots,m$:

$$\boxed{\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = \ell_j}$$

Απόδειξη:

αριστερά

$\iff \forall \bar{x}_\nu \subset U\setminus\{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$: $\bar{f}(\bar{x}_\nu)\to\bar{\ell}$

$\overset{\text{παλιά πρόταση}}{\iff} \forall j=1,\dots,m$ $f_j(\bar{x}_\nu)\to\ell_j$

$\iff \forall j=1,\dots,m$ $\forall \bar{x}_\nu\in U\setminus\{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu\to\bar{x}_0$ $f_j(\bar{x}_\nu)\to\ell_j \iff$ δεξιά □.

Ισχύουν οι ιδιότητες: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\bar{f}(\bar{x})=\bar{\ell}$ και

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\bar{g}(\bar{x})=\bar{m} \Rightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x})=\bar{\ell}+\bar{m}$,

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}(a\bar{f})(\bar{x})=a\bar{\ell}$, $a\in\mathbb{R}$.

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\underbrace{(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x})}_{=\bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{g}(\bar{x})}=\bar{\ell}\cdot\bar{m}$ [Άσκηση]

$\boxed{\text{Ορισμός}}$

$\bar{f}$: σ/ς στο $\bar{x}_0 \in U$

: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$
$\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$

και ισχύουν οι ιδιότητες $\bar{f}, \bar{g}$ σ/ς στο $\bar{x}_0 \Rightarrow$
τότε $\bar{f}+\bar{g}$, $a\bar{f}$, $\bar{f}\cdot\bar{g}$ σ/ς στο $\bar{x}_0$.